

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ ТЕЛ С ШЕРОХОВАТОЙ ГРАНИЦЕЙ ПРИ ПОЧТИ ПОЛНОМ ИХ КОНТАКТЕ

Рафаил Львович САЛГАНИК родился в 1934 г. в городе Одессе. Ведущий научный сотрудник Института проблем механики РАН. Доктор физико-математических наук, профессор. Основные научные интересы — в области теории упругости, теории пластичности, разрушения деформируемых тел, контактной механики. Автор 121 научной работы.

Rafael L. SALGANIK, D.Sci., was born in 1934, in Odessa. He is a Principal Research Associate at the Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences. His research interests include theory of plasticity, elasticity theory, fracture of deformable bodies, contact mechanics. He has published 121 technical papers.

Александр Николаевич МОХЕЛЬ родился в 1949 г. в городе Москве. Старший научный сотрудник Института проблем механики РАН, кандидат физико-математических наук. Основные научные интересы — в области теории упругости, теории пластичности, разрушения деформируемых тел, контактной механика. Автор 47 научных работ.

Alexander N. MOKHEL, Ph.D., was born in 1949, in Moscow. He is a Senior Research Associate at the Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences. His research interests include theory of plasticity, elasticity theory, fracture of deformable bodies, contact mechanics. He has published 47 technical papers.

Александр Александрович ФЕДОТОВ родился в 1983 г. в городе Москве. Ассистент «МАТИ»-РГТУ им. К.Э. Циолковского. Основные научные интересы — в области теории упругости. Автор четырех научных работ.

Alexander A. FEDOTOV, was born in 1983, in Moscow. He is an Assistant Professor at the Moscow State Aviation Technological University (MATI), he is also working toward Ph.D. degree. His research interests include elasticity theory. He has published 4 technical papers.

Рассмотрена задача теории упругости о контакте двух полуограниченных тел, одно из которых абсолютно жёсткое. При этом граница одного из этих тел плоская, а граница другого шероховатая и близка к плоской. Предполагается, что контакт между телами почти полный, причём сдвиговым взаимодействием между контактирующими телами пренебрегается. В литературе задачам такого типа, представляющим большой прикладной интерес, уделено относительно мало внимания.

Решение рассматриваемой задачи представляется в виде суммы решений следующих двух задач: задачи 1, в которой предполагается, что контакт имеет место всюду, и задачи 2, в которой предполагается, что имеются площадки отсутствия контакта, или площадки неконтакта, которые представляются математическими разрезами и находятся в областях, где согласно решению задачи 1 действуют, в основном, растягивающие напряжения. Считаем, что берега математических разрезов нагружены напряжениями, равными по величине и противоположными по знаку тем, которые получаются в соответствующих местах согласно решению задачи 1. В результате, при сложении решений обеих задач, эти берега оказываются свободными от напряжений. Контуры указанных разрезов находятся из условия непрерывности напряжений на них.

Рассматриваются условия, при которых площадки неконтакта расположены достаточно редко для того, чтобы взаимодействием между ними (точнее, между порождаемыми ими возмущениями упругого поля) можно было пренебречь. Это позволяет решать задачу асимптотически, учитывая эффекты от отдельных площадок неконтакта независимо друг от друга. Рассмотрены случаи плоской деформации и пространственный случай. Приведен пример расчетов для ситуации, моделирующей контакт шины с дорожным покрытием при наличии в нём протяженной выбоины.

1. Введение

Учёт влияния шероховатости поверхностей тел при возникновении контакта между ними под действием нагрузок на напряжённо-деформированное состояние этих тел в зоне контакта и вблизи неё является ключевой проблемой. Она привлекает внимание исследователей в области контактной механики, продолжая вызывать их активный интерес, особенно в связи со всё новыми возможностями,

открываемыми применением компьютерных расчетов.

При этом важным для решения указанной проблемы является применение асимптотических методов. Оно эффективно в случаях: 1) когда контакт возникает в основном лишь на сравнительно небольших по площади и редко расположенных участках, или «пятнах контакта»; 2) когда образуются лишь сравнительно небольшие по площади щеле-

видные участки отсутствия контакта, или участки неконтакта, которые можно трактовать как математические разрезы между рассматриваемыми телами.

Основное внимание в литературе уделено первому случаю [1–6]. Противоположный же случай почти полного контакта, изучен гораздо меньше. Его рассмотрение в данной работе опирается на результаты работы [7] с использованием результатов работ [8, 9]. Этот случай, значение которого подчеркнуто в [6], представляет существенный практический интерес и реализуется, когда одно из контактирующих тел намного податливее другого и прижато к нему достаточно сильно, а также при определенных видах шероховатости, например для условий контакта шины колеса автомобиля или самолёта с дорожным покрытием при наличии в последнем достаточно глубоких и протяжённых выбоин, расположенных относительно редко.

Далее контактирующие тела предполагаются полуграниченными и находящимися в равновесии в отсутствие объёмных сил. Одно из них считается абсолютно жестким (далее для краткости будем называть его жестким), а другое — однородным, изотропным, упругим и испытывающим малые деформации. Граница одного из этих тел предполагается плоской, а другого — шероховатой. Шероховатость последней предполагается достаточно пологой для того, чтобы граничные условия можно было записывать на невозмущённой шероховатостью плоской границе. Рассматривается случай отсутствия сдвигового взаимодействия. Такое взаимодействие можно учесть в качестве следующей аппроксимации, базирующейся на предположениях, сходных с принимаемыми в [10].

При прочих равных условиях напряжённое состояние упругого тела, в случае, когда шероховатость имеется на границе упругого тела и отсутствует на границе жесткого тела, будет таким же, как в случае, когда соответствующая шероховатость имеется на границе жёсткого тела и отсутствует на границе упругого тела. При этом, как будет видно из дальнейшего, само определение площадок неконтакта обеспечивает существование зазора между их противоположными берегами и тем самым обращение в нуль действующих на упругое тело напряжений в области площадок неконтакта. Например, при прижатии рассматриваемых тел друг к другу равномерно распределённым на «бесконечности» давлением напряжённое состояние упругого тела с выбоиной, вне которой граница упругого тела плоская, а граница жёсткого тела всюду плоская, будет таким же, как в случае, когда в жёстком теле имеется выбоина, зеркальная указанной выше, а граница упругого тела всюду плоская. Учитывая это

обстоятельство, далее в разд. 2 и 3 будем для определённости считать, что шероховатой является граница упругого тела, а граница жёсткого тела плоская.

2. Случай плоской деформации

Находящееся в контакте с жёстким телом упругое тело, имеющее модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν , будем считать занимающим полуплоскость $y > 0$ декартовой координатной плоскости xy .

2.1. Случай полного контакта

Считая контакт полным, запишем:

$$v|_{y=0} = h - \zeta(x), \quad \tau_{xy}|_{y=0} = 0, \quad (2.1)$$

где v — y -компонента смещения; $\zeta(x)$ — предполагаемая заданной шероховатость упругого тела; $h = \text{const}$ — сближение сдавливаемых тел; τ_{xy} — касательное напряжение. Условие на бесконечности состоит в требовании исчезновения напряжений при $y \rightarrow \infty$. При нахождении переменной части упругого поля, что является основной задачей, можно, в силу линейности всей задачи, принять $h = 0$.

Положим вначале, что шероховатость изменяется по закону косинуса:

$$-\zeta(x) = v_b(x) = v_{b0} \cos(kx), \quad (2.2)$$

где v_{b0} и k (волновое число) — константы; далее предполагаем, что $k > 0$. Решение этой задачи дано в [8]:

$$p_b(x) = -\sigma_y|_{y=0} = A \cos(kx), \quad A = \frac{v_{b0} k E}{2(1-\nu^2)}. \quad (2.3)$$

Предположим теперь, что шероховатость определяется функцией общего вида $v_b(x) = -\zeta(x)$. Тогда решение задачи получаем, применяя косинус-преобразование Фурье:

$$F_c(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \cos(kx) dx; \\ f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_c(k) \cos(kx) dk. \quad (2.4)$$

Здесь $f(x)$ — некоторая функция; $F_c(k)$ — её косинус-трансформанта Фурье.

Тогда, используя (2.2), (2.3) и линейность задачи, получаем для контактного давления:

$$p_b(x) = -\sigma_y|_{y=0} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty A(k) \cos(kx) dk;$$

$$A(k) = \frac{kE}{2(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty v_b(x) \cos(kx) dx. \quad (2.5)$$

Эффект от сближения тел (выше принимавшийся нулевым) состоит в том, что к давлению, выражаемому (2.5), надо прибавить определяемое ненулевым сближением тел h постоянное давление $p > 0$, которое будем считать заданным. В упругом теле это давление должно формально считаться действующим на бесконечности. В случае полного контакта тел контактное давление будет равно

$$p_f(x) = p + p_b(x).$$

2.2. Условные площадки неконтакта

Пусть давление p не настолько велико, чтобы обеспечить $p_f(x) > 0$ всюду. Тогда условные площадки неконтакта находятся как площадки, где $p_f(x) < 0$, что с учётом (2.5) даёт следующее условие для определения площадок неконтакта:

$$p_f(x) = p + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty A(k) \cos(kx) dk \leq 0. \quad (2.6)$$

2.3. Случай контакта, близкого к полному

Теперь предположим, что контакт неполный, т.е. имеются площадки неконтакта, образовавшиеся на месте условных площадок неконтакта. Ограничимся рассмотрением случая, когда взаимным влиянием площадок неконтакта можно пренебречь. Эта задача может быть сведена к нахождению возмущения упругого поля, создаваемого единственной площадкой неконтакта, которую, как указано выше, можно трактовать как математический разрез между рассматриваемыми телами.

Чтобы найти это возмущение, можно (с учётом отсутствия касательных напряжений вдоль оси x) считать этот математический разрез находящимся в бесконечном теле. Такой разрез должен находиться в интервале оси x , попадающем (своей основной частью) в область условной площадки неконтакта. Противоположные берега этого разреза надо считать загруженными симметрично (по отношению к оси x) и стремящимися раскрыть её нормальными напряжениями, равными по величине и противоположными по знаку тем, которые действовали бы в случае, если бы контакт был полным. Тогда, при

сложении вызываемого присутствием указанного разреза возмущения упругого поля и упругого поля, которое имело бы место в случае отсутствия этой разреза, т.е. в случае полного контакта, берега этого разреза оказались бы незагруженными, как и должно быть. Такая задача о возмущении упругого поля математически эквивалентна задаче о возмущении упругого поля, создаваемом трещиной, моделируемой в теории трещин разрезом указанного выше вида. Соответственно, ниже при решении этой задачи будет использоваться терминология теории трещин.

Решение указанной задачи о возмущении упругого поля известно и может быть найдено при помощи результатов [8]. Согласно этому решению, нормальные напряжения σ_x и σ_y и касательное напряжение τ_{xy} в полуплоскости $y > 0$ могут быть выражены через аналитическую функцию $Z(\bar{z})$ комплексной переменной $\bar{z} = x + iy$ ($i^2 = -1$):

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \operatorname{Re} Z - y \operatorname{Im} Z', \\ \sigma_y &= \operatorname{Re} Z + y \operatorname{Im} Z', \\ \tau_{xy} &= -y \operatorname{Re} Z'. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Здесь $Z' = dZ/d\bar{z}$; Re и Im обозначают реальную и мнимую части соответствующей функции. Из (2.1)

следует выполнение условия $\tau_{xy}|_{y=0} = 0$.

Для смещений u и v по осям x и y имеем

$$\begin{aligned} 2Gu &= (1 - 2\nu) \operatorname{Re} \bar{Z} - y \operatorname{Im} Z; \\ 2Gv &= 2(1 - \nu) \operatorname{Im} \bar{Z} - y \operatorname{Re} Z, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $G = [E/2(1 + \nu)]$ — модуль сдвига; $(d\bar{Z}/d\bar{z}) = Z$.

Для рассматриваемой задачи, обозначив координаты концов трещины как $x_1, x_2 > x_1$, имеем

$$\begin{aligned} Z(\bar{z}) &= \\ &= \frac{1}{\pi \sqrt{(\bar{z} - x_1)(\bar{z} - x_2)}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{p_f(\xi) \sqrt{(\xi - x_1)(x_2 - \xi)}}{\xi - \bar{z}} d\xi. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Как видно из (2.7) и (2.9), напряжение σ_y на продолжении трещины имеет сингулярности в точках $x = x_1$ и $x = x_2$, асимптотически изменяясь око-

ло них как $K_I^{(1)}/\sqrt{2\pi(x_1-x)}$ и $K_I^{(2)}/\sqrt{2\pi(x-x_2)}$, где $K_I^{(1)}$ и $K_I^{(2)}$ — коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) [11]:

$$\begin{aligned} K_I^{(1)} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi(x_2-x_1)}} \int_{x_1}^{x_2} p_f(x) \sqrt{\frac{x_2-x}{x-x_1}} dx; \\ K_I^{(2)} &= -\sqrt{\frac{2}{\pi(x_2-x_1)}} \int_{x_1}^{x_2} p_f(x) \sqrt{\frac{x-x_1}{x_2-x}} dx. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Перейдём теперь к вопросу определения x_1 и x_2 . Начнём со случая полной гладкости профиля шероховатости. Тогда, как отмечалось выше, координаты концов трещины находятся из условия обращения в нуль угла наклона касательной к профилю трещины в концах трещины. Последнее равносильно обращению в нуль коэффициентов интенсивности напряжений в этих концах. Отсюда с учётом (2.10) следует:

$$K_I^{(1)} = K_I^{(2)} = 0, \quad (2.11)$$

что даёт систему двух уравнений для определения x_1 и x_2 :

$$\begin{aligned} \pi(x_2-x_1)p + \int_{x_1}^{x_2} p_b(x) \sqrt{\frac{x_2-x}{x-x_1}} dx &= 0; \\ \pi(x_2-x_1)p + \int_{x_1}^{x_2} p_b(x) \sqrt{\frac{x-x_1}{x_2-x}} dx &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Необходимое условие существования решения (2.12) в виде зависимостей $x_1(p)$ и $x_2(p)$ состоит

в том, чтобы давление $p_b(x)$ было отрицательным (что соответствует растяжению) в части интервала интегрирования, в такой мере, которая обеспечивает отрицательность обоих интегралов в (2.12). Выбор начального интервала интегрирования на основе предварительного нахождения условных площадок неконтакта, как объяснялось выше, и делается для того, чтобы обеспечить выполнение этого условия.

Отметим аналогию между рассмотрением, проведённым выше, и рассмотрением, относящимся к равновесной трещине в [12] (см. гл. 8).

Рассмотрим теперь случай, когда положение одного из концов площадки неконтакта определено из условия нарушения в нём гладкости профи-

ля шероховатости. Это условие включает также возможность разрыва непрерывности профиля шероховатости. Предположим, например, что именно такой случай имеет место при $x=x_2$, когда происходит скачок нормальных смещений на трещине.

Тогда КИН $K_I^{(2)}$ приобретет искомое ненулевое значение. Координата же x_1 будет определяться из условия $K_I^{(1)} = 0$.

Перейдём к случаю, когда положения обоих концов площадки неконтакта определены из условия нарушения в них гладкости профиля шероховатости, например нахождением в концах площадки неконтактных скачков профиля шероховатости. Теперь уже и $K_I^{(1)} \neq 0$ и $K_I^{(2)} \neq 0$, так что вблизи точек $x=x_1$ и $x=x_2$ имеет место сильная концентрация напряжений.

Отметим, что, если функция $p_f(x)$ — четная относительно центра трещины, моделирующей область неконтакта, можно принять $x_1=-a, x_2=a$, и тогда из (2.9) получим

$$Z(\tilde{z}) = \frac{2\tilde{z}}{\pi\sqrt{\tilde{z}^2-a^2}} \int_0^a \frac{p_f(\xi)\sqrt{a^2-\xi^2}}{\xi^2-\tilde{z}^2} d\xi. \quad (2.13)$$

Далее с учётом (2.9), (2.10) получим

$$K_I^{(1)} = K_I^{(2)} = -2\sqrt{\frac{a}{\pi}} \int_0^a \frac{p_f(x) dx}{\sqrt{a^2-x^2}}. \quad (2.14)$$

Тогда вместо двух уравнений (2.12) получаем одно уравнение

$$\frac{\pi}{2} p + \int_0^a \frac{p_b(x) dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = 0, \quad (2.15)$$

позволяющее найти единственную неизвестную величину — полудлину площадки неконтакта a .

Распределение нормального напряжения ищется в области $y=0, |x|>a$, так как трещина предполагается ненагруженной. Тогда с помощью (2.14) и (2.7) получим

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \text{Re } Z(\tilde{z}) = \\ &= \frac{2x}{\pi\sqrt{x^2-a^2}} \int_0^a \frac{p_f(\xi)\sqrt{a^2-\xi^2}}{\xi^2-x^2} d\xi, \quad x>a, y=0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Данное выражение с учетом (2.15) приводится к виду

$$\sigma_y = p + p_b(a) + \frac{2x\sqrt{x^2 - a^2}}{\pi} \int_0^a \frac{p_b(\xi) - p_b(a)}{(x^2 - \xi^2)\sqrt{a^2 - \xi^2}} d\xi, \quad x > a, y = 0. \quad (2.17)$$

Этот интеграл существует для большого класса «хороших» функций $p_b(x)$ (в частности, дифференцируемых всюду). Полное напряжение, равное контактному давлению $-p_c(x)$, получается прибавлением к напряжению σ_y , определяемому по формуле (2.17), напряжения для случая полного контакта, которое действует в области $x > a, y = 0$ и равно $-[p + p_b(x)]$. В частности, видно, что полное напряжение обращается в нуль при $x = a, y = 0$, как и должно быть для ненагруженной трещины.

3. Пространственный случай

Пусть упругое тело, занимающее полупространство $z > 0$ декартовой системы координат x, y, z , имеет те же свойства и тип шероховатости границы, что и выше, и находится в контакте с жестким телом, имеющим плоскую границу.

3.1. Случай полного контакта

В этом случае

$$\begin{aligned} w|_{z=0} &\equiv w_B(x, y) = h_* - \zeta_*(x, y), \\ \tau_{xz}|_{z=0} &= \tau_{yz}|_{z=0} = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где w — z -компонента смещения; $\zeta_*(x, y)$ — шероховатость упругого тела, предполагаемая известной; $h_* = \text{const}$ — заданное сближение контактирующих тел; τ_{xz}, τ_{yz} — касательные напряжения. Условие на бесконечности заключается в исчезновении напряжений при $z \rightarrow \infty$. Как и выше, при нахождении возмущения упругого поля, вследствие линейности задачи, будем сначала считать в (3.1) $h_* = 0$.

Предполагая, что шероховатость бикосинусоидальная, и используя решение задачи для этого случая из [9], можно при помощи соответствующего косинус-преобразования Фурье получить решение для случая, когда шероховатость задана в виде про-

извольной функции $\zeta_*(x, y)$, которую для простоты будем считать четной по x и y .

Для контактного давления из указанного решения имеем:

$$p_B(x, y) = \frac{E}{\pi(1 - \nu^2)} \times \int_0^\infty \int_0^\infty \sqrt{k_x^2 + k_y^2} W_c(k_x, k_y) \cos(k_x x) \cos(k_y y) dk_x dk_y, \quad (3.2)$$

где

$$W_c(k_x, k_y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty w_B(x, y) \cos(k_x x) \cos(k_y y) dx dy, \quad (3.3)$$

$$w_B(x, y) = -\zeta_*(x, y).$$

Далее найдем эффект от сближения тел. Для этого следует прибавить к давлению из (3.2) постоянное давление p ($p > 0$), обусловленное сближением тел, и действовать так же, как и в пункте 2.1. Таким образом, при полном контакте контактное давление будет $p_F(x, y) = p + p_B(x, y)$.

3.2. Условные площадки неконтакта

Эти площадки определяются как области, где контактное давление при полном контакте отрицательно:

$$p_F(x, y) = p + \frac{E}{\pi(1 - \nu^2)} \times \int_0^\infty \int_0^\infty \sqrt{k_x^2 + k_y^2} W(k_x, k_y) \cos(k_x x) \cos(k_y y) dk_x dk_y \leq 0. \quad (3.4)$$

3.3. Случай контакта, близкого к полному

Этот случай по своей сути аналогичен рассмотренному в п. 2.3. Считая площадки неконтакта расположенными достаточно редко и поэтому невзаимодействующими, искомое решение можно представить как сумму возмущений упругого поля, создаваемых площадками неконтакта, и упругого поля для задачи о полном контакте из п. 3.1. Таким образом, задача сводится к поиску возмущения упругого поля, создаваемого единичной площадкой неконтакта, трактуемой как трещина. Вследствие исчезновения контактных касательных напряжений эту трещину можно считать находящейся в бесконечном пространстве и нагруженной по берегам нормальными напряжениями, которые могут быть

найлены аналогично тому, как это делалось в п. 2.3. Возможно большое разнообразие форм подобных площадок неконтакта. Поэтому, чтобы получить удобное на практике приближённое решение задачи, целесообразно подобрать подходящие аппроксимации для этих форм.

Представляется перспективными в этом отношении разделить грубо все площадки неконтакта на группу примерно равноосных площадок, находящихся примерно в условиях осесимметричного нагружения, и на группу сильно вытянутых вдоль определённой оси площадок неконтакта. Варианты аппроксимации, соответствующие этому разделению, следующие.

Вариант 1. Используется аппроксимация площадки неконтакта дискообразной трещиной, противоположные берега которой загружены осесимметричным распределением раскрывающих трещину напряжений $p_F(r) = p + p_B(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Полное решение задачи для этой трещины известно [12]. В этом случае

$$K_I = -\frac{2}{\sqrt{\pi a}} \int_0^a \frac{r p_F(r)}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[p\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^a \frac{r p_B(r)}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \right], \quad (3.5)$$

где a — радиус площадки неконтакта. Он находится из условия $K_I = 0$, что приводит к уравнению

$$p + \frac{1}{a} \int_0^a \frac{r p_B(r)}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr = 0. \quad (3.6)$$

Вариант 2. Площадка неконтакта достаточно сильно вытянута вдоль определённой оси. При этом основной интерес представляет определение координат концов такой площадки или моделирующей её трещины в сечениях, перпендикулярных направлению вытянутости площадки. Для определения этих координат можно приближённо считать, что при переходе от одного такого сечения к соседнему происходит смена напряжённо-деформированных состояний, соответствующих условиям плоской деформации. Поэтому можно воспользоваться системой уравнений (2.12), в которой $p_b(x)$ надо заменить на $p_B(x', y')$, где координата x' отсчитывается вдоль лежащей в плоскости $z = 0$ оси, перпендикулярной оси, вдоль которой вытянута

площадка неконтакта, а координата y' — вдоль этой последней оси. В результате такой замены координаты концов трещины, которые теперь обозначим x'_1, x'_2 , поскольку они должны отсчитываться вдоль оси x' , будут функциями от y' , дающими уравнения контура площадки неконтакта при значениях y' , не слишком близких к концам этой площадки, находящимся на оси y' : $x'_1 = x'_1(y')$, $x'_2 = x'_2(y')$.

Предположим теперь, что имеются нарушения гладкости рельефа шероховатости типа рассмотренных выше. Тогда положение некоторой части или даже всего контура площадки неконтакта может быть определено из условия нарушений на нём гладкости рельефа. Коэффициенты интенсивности напряжений в таких местах будут отличны от нуля и будут определять соответствующую концентрацию напряжений.

4. Пример расчета

Рассмотрим в качестве примера задачу о напряжённом состоянии упругого тела, возникающем при прижатии его равномерно распределённым на «бесконечности» давлением p_0 , когда в жёстком теле имеется выбоина, вне которой граница жесткого тела плоская, а граница упругого тела всюду плоская. Как отмечалось во введении, в этом случае напряжённое состояние будет таким же, как и в случае, когда в упругом теле имеется выбоина (зеркальная вышеупомянутой), вне которой граница упругого тела плоская, а граница жёсткого тела всюду плоская. Ограничимся случаем плоской деформации, считая упругое тело занимающим полуплоскость $y > 0$. Форму выбоины в жестком теле зададим в виде

$$\zeta = -\frac{\zeta_0 l^2}{(x^2 + l^2)}, \quad (4.1)$$

где ζ_0 и l — параметры с размерностью длины, причем $\zeta_0 \ll l$. Такая задача может, в частности, рассматриваться как модельная для встречающейся на практике ситуации, возникающей при контакте шины колеса автомобиля или самолёта с достаточно жёстким дорожным покрытием при наличии в последнем достаточно глубокой и протяжённой выбоины. Тогда, принимая во внимание, что $\zeta(x) = -v_b(x)$, найдем с помощью (2.3)—(2.5):

$$p_b(x) = -\frac{E\zeta_0 l}{2(1-\nu^2)} \int_0^\infty k e^{-kl} \cos(kx) dk =$$

$$= \frac{E\zeta_0 l}{2(1-\nu^2)} \frac{x^2 - l^2}{(x^2 + l^2)^2}, \quad p_f = p + p_b(x). \quad (4.2)$$

Поскольку $p_f(x)$ — четная функция, то из уравнений (2.15)–(2.17) следует:

$$a = \left[\left(\frac{E\zeta_0}{2(1-\nu^2)} \frac{l^2}{p} \right)^{2/3} - l^2 \right]^{1/2}; \quad (4.3)$$

$$p_c = p \frac{x\sqrt{x^2 - a^2} (3l^2 + 2a^2 + x^2)}{(x^2 + l^2)^2}. \quad (4.4)$$

Далее, для иллюстрации полученных зависимостей удобно перейти к безразмерным величинам, отнеся длину к l , а напряжение к величине $E\zeta_0/2(1-\nu^2)l$, представляющей собой давление, ниже которого появляются площадки неконтакта (см. (4.2)). При таком обезразмеривании координата x переходит в $\bar{x} = x/l$, полуширина площадки неконтакта a — в $\bar{a} = a/l$, а контактное давление p_c — в без-

размерную величину $\bar{p}_c = p_c 2(1-\nu^2)l/(E\zeta_0)$. Соответствующие результаты вычислений по формулам (4.3) и (4.4) приведены на рис. 1 и 2.

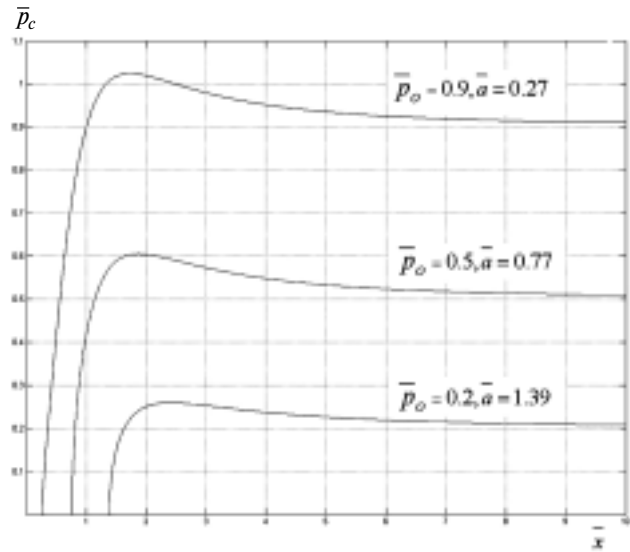


Рис. 2. Распределения контактного давления $\bar{p}_c = \bar{p}_c(\bar{x})$ в окрестности площадки «неконтакта» при разных уровнях давления $\bar{p}_0 = 0,2; 0,5; 0,9$, приложенного вдали от одиночной выбоины вида

$$\zeta = -\zeta_0 l^2 / (x^2 + l^2), \quad \zeta_0 = 0,01 \cdot l$$

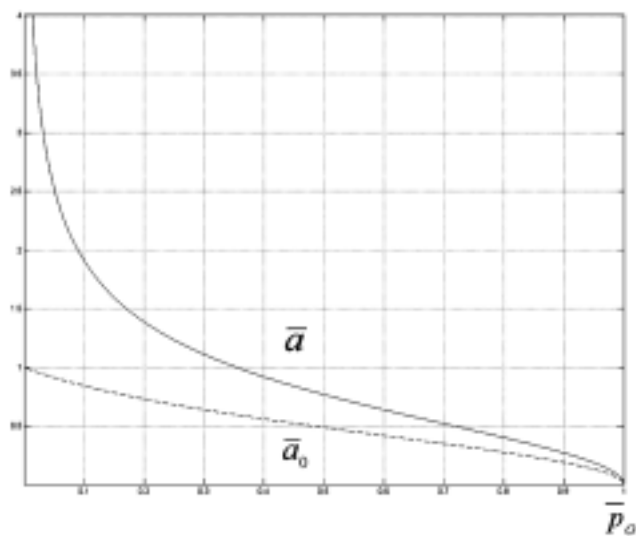


Рис. 1. Зависимость полудлины площадки неконтакта \bar{a} , определяемой по формуле (4.3), от давления \bar{p}_0 , приложенного вдали от одиночной выбоины вида $\zeta = -\zeta_0 l^2 / (x^2 + l^2)$, $\zeta_0 = 0,01 \cdot l$; для сравнения, штриховой линией дана аналогичная зависимость для полудлины условной площадки неконтакта \bar{a}_0 , которая находится из (4.2)

Выводы

В работе дана общая схема асимптотического решения задач о напряжённом состоянии, возникающем при почти полном контакте (в предположении о пренебрежимой малости контактных касательных напряжений) прижимаемых друг к другу полуограниченных тел, одно из которых абсолютно жесткое, а другое упругое, причём граница одного из этих тел имеет достаточно пологую шероховатость, а граница другого тела плоская. Условия контакта указанных тел предполагаются такими, что площадки, где контакт отсутствует (площадки неконтакта), изолированы друг от друга и расположены достаточно редко, чтобы их взаимодействием можно было пренебречь. Эта схема позволяет эффективно решать задачи как для случая плоской деформации, так и для пространственного случая.

Для плоской деформации получено аналитическое решение задачи, которое позволяет рассчитывать положения и величины максимумов контактного давления, возникающих вблизи площадок неконтакта, и оценивать возможность разрушения контактирующих тел.

Рассмотрен конкретный пример и приведены результаты расчётов для плоской деформации. Этот пример может использоваться, в частности, как основа для моделирования взаимодействия шины колеса автомобиля или самолёта с дорожным покрытием, в котором имеется единичная выбоина.

В случаях, когда существенно взаимодействие площадок неконтакта, оно может быть учтено путем применения метода итераций, аналогичного рассмотренному в [3, п. 6.4.1].

Summary

A contact problem of elasticity theory is considered for semirestricted bodies with rough surfaces in the case of almost full contact between them. Shearing interaction between contacting bodies is neglected. The plane strain case is analyzed as well as the spatial one. A numerical example is given to demonstrate how to solve the contact problem for the case of tyre on pavement with extended hole in it.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-08-50269).

Библиографический список

1. *Liu Zh., Hua M., Reuben R.L.* Three-dimensional contact model for numerically analyzing pressure distribution in wear. *Tribology letters*, 1999, v. 7, p. 183-197.
2. *Polonsky I.A., Keer L.M.* A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradients techniques. *Wear*, 1999, v. 231, p. 206-219.
3. *Горячева И.Г.* Механика фрикционного взаимодействия. — М.: Наука, 2001.

4. Механика контактных взаимодействий: Сборник статей под ред. И.И. Воровича и В.М. Александрова. — М.: Физматлит, 2001.

5. *Peng W., Bhushan B.* Three-dimensional contact analysis of layered elastic/plastic solids with rough surfaces. *Wear*, 2001, v. 249, p. 741-760.

6. *Persson B.N.J.* Contact mechanics for randomly rough surfaces. *Surface Science Reports*, 2006, v. 61, p. 201-227.

7. *Салганик Р.Л., Марков В.Г., Мохель А.Н., Федотов А.А.* Применение методов теории трещин и преобразования Фурье к контактной задаче для тел с шероховатыми границами. Препринт ИПМех РАН. 2006. № 825. 52 с.

8. *Westergaard H.M.* Bearing pressures and cracks. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1939, v. 6, p. A49-A53.

9. *Johnson K.L., Greenwood J.A., Higinson J.G.* The contact of elastic regular wavy surfaces. *Int. J. of Mech. Sci*, 1985, v. 27, No. 6, p. 383-396.

10. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. — М.: Мир, 1989.

11. Разрушение. Т. 2 / Под ред. Г. Либовица. — М.: Мир, 1975.

12. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. — Изд. пятое. — М.: Наука, 1966.

Институт проблем механики Российской Академии наук «МАТИ» — Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского
Статья поступила в редакцию 1.10.2007

Сдано в набор 9.11.07. Подписано в печать 28.12.07.
Бумага офсетная. Формат 60×84 1/8. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 14,65. Уч.-изд. л. 15,75. Тираж 105 экз.
Заказ 3862/064.

Издательство МАИ-ПРИНТ
«МАИ», Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993
Типография Издательства МАИ
«МАИ», Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993

Сдано в набор 9.11.07. Подписано в печать 28.12.07.
Бумага офсетная. Формат 60×84 1/8. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 14,88. Уч.-изд. л. 16,0. Тираж 100 экз.
Заказ 3862/2299. С. .

Издательство МАИ
«МАИ», Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993
Типография Издательства МАИ
«МАИ», Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993